# توزیع وایبل تعمیم یافته با نرخ مخاطره U شکل

**فرشته علی حسینی[1]**

**دانشکده علوم ریاضی دانشگاه صنعتی اصفهان**

f.alihoseini@math.iut.ac.ir

## چکیده

دانستن شکل و نوع از کار افتادگی یک سیستم و یا مؤلفه ای ازیک سیستم از اهمیت خاصی برای یک مدیر و یا مهندس نگهداری و تعمیرات برخورداراست .این اهمیت از آن جهت است که می توان با توجه به اطلاعات موجود عملکرد سیستم را پیش بینی کرده و از خرابی های ناگهانی جلوگیری به عمل آورد. درواقعیت با موارد زیادی روبرو می شویم که داده ها دارای توزیع طول عمر Uشکل می باشند.در این مقاله به بررسی توزیع وایبل تعمیم یافته و برآورد پارامترهای آن می‌پردازیم.

**واژه های کلیدی:**توزیع وایبل- نرخ مخاطره Uشکل- برآورد پارامتر-کاغذ احتمال وایبل-

## مقدمه

مبحث قابلیت اطمینان یکی از شاخه های است که امروزه به طور وسیعی در شاخه های مختلف علوم از جمله پزشکی و مهندسی مورد استفاده قرار می گیرد .هنگامی که با یک موجود زنده سر و کار داریم (که می تواند انسان ، قطعه الکتریکی‌و. . .) باشد علاقمندیم از از نقطه نظر احتمالی بررسی کنیم که چنین موجودی با چه احتمالی از زمان t بیشتر عمر می کند و در واقع هنگامی که یک موجود زنده را وظیفه ای معین در اختیارش می گذاریم علاقمندیم قابلیت انجام چنین وظیفه ای را از نقطه نظر احتمالی روی چنین موجودی اندازه گیری کنیم.مجموعه فعالیت های لازم برای طراحی، تولید، ساخت و استفاده از یک کالا جهت تأمین و افزایش میزان اعتماد به کارکرد کالا را مهندسی قابلیت اطمینان می نامند که نظریه قابلیت ابزار مورد نیاز برای تأمین فعالیت های فوق است و روش های آماری ستون فقرات این ابزار به حساب می آید.

برای تعیین مدل مناسب آماری به داده ها و تجزیه و تحلیل های مربوط لازم است که در ابتدا کلیه توزیع هایی که می تواند به عنوان توزیع طول عمر داده ها به کار روند را مورد بررسی قرار داد و مناسب ترین توزیع را انتخاب کرد.با شناخت توزیع مهمترین استنباط های آماری در رابطه با پارامترمدل های مورد استفاده ، برآورد آنها و انجام آزمون در مورد آن پارامترها است.

---

۱-دانشجوی کارشناسی ارشد آمار اقتصادی اجتماعی

مفهوم سالخوردگی در نظریه قابلیت اطمینان خیلی مهم است.عدم سالخوردگی به این معنی است که سن مؤلفه تأثیری برروی توزیع میانگین باقی مانده عمر ندارد.سالخوردگی مثبت  این مفهوم را در بر دارد که با افزایش سن مؤلفه باقی مانده عمر آن رو به کاهش است و سالخوردگی منفی برعکس حالت قبلی عمل می کند.در قابلیت اطمینان معمولاً برای مطالعه روی خصوصیات مربوط به طول عمر اجزاء را در قالب ۳ تابع زیر بیان می کنیم.

۱- تابع قابلیت اعتماد (تابع بقا)

$$\overline{\mathrm{F}}(t)=1-\mathrm{F}(t)=P(T\geq t) \quad (1)$$

۲- تابع نرخ از کارافتادگی : این تابع اغلب به عنوان تابع نرخ مخاطره شناخته می شود.

$$h(t)=\frac{f(t)}{\overline{F}(t)}=\lim\frac{1}{\delta t}P(t<T<t+\delta t\mid T>t) \quad (2)$$

۳- میانگین باقی ماندهٔ عمر(MRL ) که به صورت زیر تعریف می شود.

$$\mu(t)=E(T-t\mid T>t)=\frac{\left[\int_t^{\infty}\overline{F}(x)dx\right]}{\overline{F}(t)} \quad (3)$$

از طرفی نرخ شکست (از کار افتادگی) را می توان به ۳ دسته زیر تقسیم بندی کرد

- نرخ شکست یکنواخت که تابع نرخ مخاطره یا صعودی و یا نزولی است.
- نرخ شکست  U شکل که تابع نرخ مخاطره در این حالت به شکل وان حمامی است یعنی ابتدا کاهشی و سپس در یک بازهٔ زمانی ثابت است و پس از آن روند افزایشی دارد.
- نرخ شکست U شکل تعمیم یافته که تابع نرخ مخاطره در اینجا به فرم یک چند جمله ای است و شکل آن حالت پیچ و خم دارد.

در این مقاله به بررسی حالت دوم یعنی نرخ مخاطره U شکل می پردازیم.

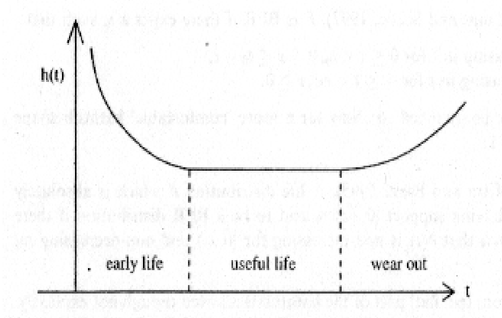
## نرخ مخاطره U شکل

توزیع F دارای نرخ مخاطره U شکل است اگر تابع نرخ مخاطره آن (h(t)) باافزایش زمان ابتدا روند کاهشی داشته باشد سپس در یک بازهٔ زمانی ثابت باشد و سرانجام سیر افزایشی را طی کند. این حالت ها متناظر با ۳ جزء واضح مؤلفه یا یک سیستم است که به صورت زیر بیان می شود.

**دوره عمراولیه :** در این دوره از کارافتادگی ها و خرابی ها رو به کاهش هستند. در کارخانه ها این دوره را دورهٔآب بندی سیستم می گویند که خرابی توسط کارخانه و گارانتی موجود بر روی دستگاه رو به کاهش است.
در انسان دورهٔ نوزادی به کودکی است که احتمال وقوع بیماری ها ودر معرض خطر بودن ها رو به کاهش است.

**دوره عمر مفید:** در این دوره خرابی ها ناشی از حادثه و یا تصادف ناگهانی است و بنابراین طول عمر ثابت است.

**دوره انقراض:** در این دوره به علت کهولت و با افزایش زمان میزان خرابی ها رو به افزایش خواهد بود.این دسته از نرخ مخاطره ها در عمل کاربرد زیادی دارند و مفید هستند و اکثر قطعات الکتریکی و الکترومکانیکی و همچنین محصولات مکانیکی دارای نرخ مخاطره U شکل می باشند.دوره زندگی انسان ها نیز دارای نرخ مخاطره U شکل است. شکل زیر این سه دوره را بر روی منحنی U شکل نشان می دهد.




شکل ۱ . نرخ مخاطره Uشکل

## تعریف ۱

تعاریف زیادی در رابطه با نرخ مخاطره Uشکل وجود دارد که در اینجا یکی از کاملترین تعاریف آن را بیان می کنیم.
این تعریف که توسط(Mi(1995 ارائه گردید به صورت زیر است .
توزیع F دارای طول عمر U شکل است اگر وجود داشته باشد $0 \le t_1 \le t_2 < \infty$ به طوریکه h(t) در بازه $0 \le t \le t_1$ اکیداً نزولی باشد. در بازه $t_1 \le t \le t_2$ ثابت باشد و به ازای $t \ge t_2$ اکیداً صعودی باشد.
نمایش دیگر این تعریف به صورت زیر است.

$$h(t) = \begin{cases} h_1(t) & t \le t_1 \\ \lambda & t_1 \le t \le t_2 \\ h_2(t) & t \ge t_2 \end{cases} \qquad (4)$$

که $h(t)$ برای بازه $[0,t_1]$اکیداً نزولی و برای $t \ge t_2$ اکیداً صعودی است.
در واقعیت با موارد زیادی روبرو می شویم که دارای این نرخ مخاطره هستند. برای مثال در صنعت می توان به زمان از کارافتادگی استارت موتورهای جت، از کار افتادگی اتومبیل ها، خرابی نشانگر های الکترونیکی در رادارها، و زمان از کارافتادگی ژنراتور الکتریکی اشاره کرد .همچنین در طبیعت داده های مربوط به مرگ و میر (پرنده ها، انسان ها و بسیاری دیگر از موجودات )از این نرخ مخاطره یعنی نرخ مخاطره U شکل پیروی می کنند.

## آزمون U شکل بودن نرخ مخاطره

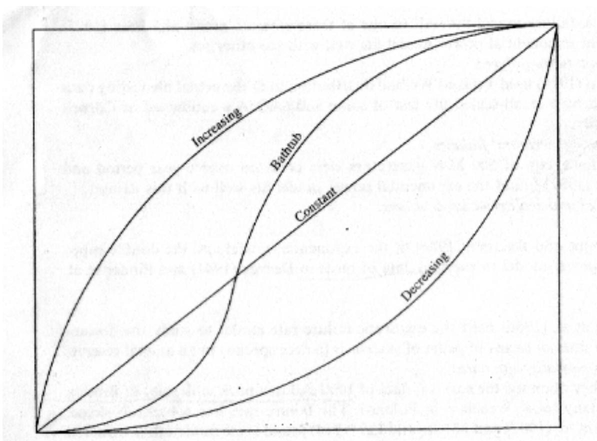
برای تشخیص نوع نرخ مخاطره داده های بقا روش های متعددی ارائه شده است .یکی از این روش ها روش گرافیکی است که بر اساس (TTT) تبدیل یافته توسط Campo, Barlow بیان شد .
مقدار عددی TTT تبدیل یافته یعنی

$$\phi_F^{-1}(t) = \frac{H_F^{-1}(t)}{H_F^{-1}(t)} \qquad (5)$$

که

$$H_F^{-1}(t)=\int_0^{F^{-1}(t)} R(u)du \qquad 0\le u\le 1 \qquad (6)$$

تابع نرخ مخاطره افزایشی(کاهشی) خواهد بود اگر منحنی TTT کوژ(کاو) باشد.برای نرخ مخاطره های U شکل TTT تبدیل یافته ابتدا کوژ(کاو) و سپس کاو(کوژ) خواهد بود و یک فرم S شکلی را حول یک خط ۴۵ درجه روی نمودار دارد.




شکل ۲ . نمودار $\phi_F$ در برابر زمان t

## توزیع وایبل معمولی

این توزیع در سال ۱۹۳۹ توسط والدی وایبل ابداع گردید و امروزه متداولترین مدل مورد استفاده در مطالعات قابلیت اعتماد است.این توزیع به طوروسیع در شاخه های مختلف مهندسی برای مدل بندی زمان های شکست کاربرد زیادی دارد.دلیل اهمیت این توزیع رفتار تابع نرخ مخاطره آن است که با تغییر پارامترهای وایبل می تواند تابعی صعودی، نزولی و یا ثابت باشد و به خاطر رفتار تابع نرخ شکست آن این توزیع برای الگو سازی داده های مختلف دارای انعطاف پذیری زیادی است.

**تعریف:** متغیر تصادفی نامنفی t دارای توزِع وایبل با پارامترهای $\alpha,\beta,\delta\ge 0$ می گوییم هرگاه تابع توزیع آن به صورت زیر ارائه شود.

$$F(T)=1-\exp(-(\frac{t-\delta}{\alpha})^{\beta}) \qquad \begin{array}{c} t>0 \\ \alpha,\beta,\delta>0 \end{array} \qquad (7)$$

حال به بررسی توزیع وایبل تعمیم یافته جدید می پردازیم.

## توزیع  وایبل تعمیم یافته جدید

از مزایای قابل توجه این توزیع نسبت به سایر توزیع های ارائه شده در این زمینه موارد زیر می باشد.یکی اینکه تعداد پارامترها در این  توزیع کم است. از طرفی فواصل اطمینان برای پارامتر شکل و ناحیه اطمینان توأم برای دو پارامتر دارای فرم بسته می باشد.

البته توزیع ارائه شده توسط Chen[4] هم دارای این خصوصیات می باشد ولی به علت نداشتن پارامتر مقیاس برای تمام مجموعه داده ها انعطاف پذیر نیست که این مشکل در مدل فوق برطرف شده است.

تابع قابلیت اعتماد توزیع جدید به صورت زیر می باشد.

$$R(t)=\exp\{\lambda\alpha[1-e^{(t/\alpha)^{\beta}}]\} \qquad \lambda,\alpha,\beta>0 \qquad t\ge 0 \qquad (8)$$

در ادامه بحث و با فرض یک سری از موارد و حالت های خاص نشان خواهیم داد که این مدل شکل توزیع وایبل را دارد و به همین دلیل توزیع وایبل تعمیم یافته نامیده می شود.

تابع نرخ مخاطره متناظر با آن به صورت زیر است که فرم U شکل دارد.

$$r(t)=\lambda\beta(\frac{t}{\alpha})^{\beta-1}\exp[(\frac{t}{\alpha})^{\beta}] \qquad (9)$$

تابع تجمعی آن به فرم زیر

$$F(t)=1-R(t)=1-\exp\{\lambda\alpha[1-e^{(t/\alpha)^{\beta}}]\} \qquad (10)$$

و تابع چگالی آن بدین صورت می باشد.

$$f(t)=\lambda\beta(\frac{t}{\alpha})^{\beta-1}\exp[(\frac{t}{\alpha})^{\beta}+\lambda\alpha(1-e^{(t/\alpha)^{\beta}})] \qquad (11)$$

## ویژگی های تابع نرخ مخاطره

برای مطالعه و بررسی شکل تابع نرخ مخاطره ابتدا از آن مشتق می گیریم .

$$r'(t)=\frac{\lambda\beta}{\alpha}(t/\alpha)^{\beta-1}\exp[(t/\alpha)^{\beta}][\beta(t/\alpha)^{\beta}+(\beta-1)] \qquad (12)$$

همتن طور که ملاحظه می کنید شکل تابع نرخ مخاطره فقط به پارامتر شکل $(\beta)$ بستگی خواهد داشت. ۲ حالت زیر را در نظر می گیریم.

**حالت اول:** $\beta\ge 1$

- در این حالت برای هر $t>0$ داریم $r'(t)>0$ و بنابراین $r(t)$ یک تابع صعودی است.
- برای $\beta>1$ داریم $r(0)=0$ و برای $\beta=1$ داریم $r(0)=\lambda$
- $r(t)\to\infty \quad as \quad t\to\infty$

**حالت دوم:** $\beta<1$

- با حل $r'(t^*)=0$ داریم $\Leftarrow$ $\quad t^*=\alpha(\frac{1}{\beta}-1)^{\frac{1}{\beta}} \qquad (13)$

می توان نشان داد که در این حالت $t^*$ موجود و متناهی است. همچنین می توان نشان داد که برای $t<t^*$ ، $r'(t)<0$ و برای $t>t^*$ ، $r'(t)>0$ است .بنابراین تابع نرخ مخاطره حالت U شکل دارد.

$$r(t)\to\infty \quad if \quad t\to 0 \quad or \quad t\to\infty$$

- نقطه تغییر (عطف) $t^*$ با کاهش $\beta$ از یک به سمت صفر افزایش می یابد.

## میانگین و واریانس زمان شکست

زمان مورد انتظار تا تا ااولین شکست یا میانگین زمان شکست (MTTF) که مخفف (Mean Time To Failure) می_ باشد به صورت زیر تعریف می شود.

$$\mu = \int_0^{\infty} tdF(t) = \int_0^{\infty} R(t)dt = \int_0^{\infty} \exp\{\lambda\alpha[1-e^{(\frac{t}{\alpha})^{\beta}}]\}dt \quad (14)$$

محاسبات فوق شامل انتگرال عددی است که فرم بسته ای ندارد. بنابراین به انتگرال گیری عددی نیاز است.

واریانس زمان شکست هم می تواند به صورت زیر محاسبه شود.

$$Var(T) = \int_0^{\infty} t^2 dF(t) - \mu^2 = 2\int_0^{\infty} tR(t)dt - \mu^2$$

$$= 2\int_0^{\infty} t\exp\{\lambda\alpha[1-e^{(\frac{t}{\alpha})^{\beta}}]\}dt - \mu^2 \qquad (15)$$

## ارتباط با توزیع وایبل عادی

توزیع وایبل را می توان یک حالت خاص از این توزیع در نظر گرفت.زمانی که مقدار پارامتر مقیاس خیلی بزرگ می شود و به سمت بینهایت میل می کند داریم :

$$1-e^{(\frac{t}{\alpha})^{\beta}} \approx 1-[1+(\frac{t}{\alpha})^{\beta} + \mathrm{O}(t)^{\beta}] \approx -(\frac{t}{\alpha})^{\beta} \qquad (16)$$

در این حالت داریم

$$R(t) = \exp\{\lambda\alpha[1-e^{(\frac{t}{\alpha})^{\beta}}]\} \approx \exp\{-\lambda\alpha^{1-\beta}t^{\beta}\} \qquad (17)$$

که این فرم توزیع وایبل دو پارامتری استاندارد با پارامتر شکل $\beta$و پارامتر مقیاس $\frac{\alpha^{\beta-1}}{\lambda}$می باشد.و حالت خیلی خاص زمانی است که $\beta = 1$ و $\alpha$به اندازه کافی بزرگ و $\frac{\alpha^{\beta-1}}{\lambda}$ثابت باشد. در این حالت مدل به توزیع نمایی با نرخ مخاطره ثابت تبدیل می شود که یک حالت خیلی خاص از فرم U شکل است.

## برآورد پارامترهای مدل

روش های مختلفی می تواند برای برآورد پارامترهای مدل بکار رود. در میان این روش ها روش گرافیکی و روش برآورد درستنمایی بیشتر از سایر روش ها رایج هستند.

### روش درستنمایی ماکزیمم

n مؤلفه را در نظر بگیرید که آنها را وارد آزمایش کرده و زمان از کارافتادگی شان را ثبت می کنیم. یک سری از داده ها نیز ممکن است که در حین آزمایش سانسور شوند

Lawless [5] نشان داد که اگر زمان شکست مؤلفه ها را با $T_1, T_2 ... T_n$ و زمان سانسور شدن آنها را با $L_1, L_2 ... L_n$ نشان دهیم در این صورت با فرض $t_i = \min\{T_i, L_i\} \quad i = 1,2...n$ تابع درستنمایی زیر را خواهیم داشت.

$$L(\lambda,\alpha,\beta) = \lambda^k \beta^k \prod_{i\in D} (\frac{t_i}{\alpha})^{\beta-1} \exp\{\sum_{i\in D} (\frac{t_i}{\alpha})^{\beta} + \sum_{i}^{n} \lambda\alpha[1-\exp(\frac{t_i}{\alpha})^{\beta}]\} \qquad (18)$$

اگر $t_i = T_i$ باشد داریم $\delta_i = 1$ و اگر $t_i = L_i$ داریم $\delta_i = 0$ در این صورت $D = \{j, \delta_j = 1 \quad 1 \le j \le n\}$ نشان دهنده مجموعه طول عمر مؤلفه هایی است که k تا از n تای آنها از کار افتاده اند.

با مشتق گیری از تابع درستنمایی بر حسب پارامترهای موجود و حل معادلات حاصل از آنها برآورد پارامترها را به دست می آوریم.از آنجائی که معادلات درستنمائی وایبل فرم بسته ای ندارند.این معادلات را با روش ها عددی حل می کنیم.

**روش گرافیکی**

برای برآورد پارامترهای مدل با استفاده ازکاغذ احتمال وایبل WPP(weibull probability plot) مراحل زیر را باید طی نمود.

حالت اول (زمانی که $\lambda\alpha = 1$)

در این حالت خاص برآورد پارامترها به راحتی به دست می آید.برای این حالت مدل ما به صورت زیر می باشد.

$$R(t) = \exp\{(1-e^{(\frac{t}{\alpha})^{\beta}})\} \qquad (19)$$

تبدیلات صورت گرفته در این حالت شبیه تبدِلات انجام شده برای توزیع وایبل است.یعنی داریم

$$x = \ln t \quad و \quad y = \beta\ln t - \beta\ln\alpha = \beta x - \beta\ln\alpha \qquad for \quad -\infty < x < +\infty \qquad (20)$$

همانطور که مشاهده می کنید با برازش خط فوق به داده ها پارامتر $\beta$ با محاسبه شیب خط و دو پارامتر باقی مانده از طریق مقدار عرض از مبدأ بدست می آیند.

حالت دوم (حالت کلی)

در این حالت داده ها را به دو قسمت (داده هایی که در آن مقدار $t$ کوچک است و داده های با t بزرگ )در نظر بگیرید.برای داده هایی که در آنها مقدار t کوچک است داریم.

$$1-e^{(\frac{t}{\alpha})^{\beta}} \approx -(\frac{t}{\alpha})^{\beta} \qquad as \quad t \to 0 \qquad (21)$$

و بنابراین خواهیم داشت :

$$x = \ln t \qquad y = \ln\{-\ln R(t)\} \qquad (22)$$

با رسم y در برابر x خطی بدست می آید که در معادله زیر صدق می کند.

$$y = \beta x + \ln(\lambda\alpha^{1-\beta}) \qquad (23)$$

بنابراین پارامتر $\beta$ براحتی برآورده می شود و مقدار عرض از مبدأ برابر است با $\ln(\lambda\alpha^{1-\beta})$

در حالت کلی تبدیلات وایبل به صورت زیر است.

$$\ln[-\ln R(t)] = \ln\{-\lambda\alpha[1-e^{(\frac{t}{\alpha})^{\beta}}]\}$$

$$= \ln\{\lambda\alpha[e^{(\frac{t}{\alpha})^{\beta}} - 1]\} = \ln(\lambda\alpha) + \ln\{e^{(\frac{t}{\alpha})^{\beta}} - 1\} \qquad (24)$$

زمانی که t بزرگ است داریم

$$\ln\{\exp[(\frac{t}{\alpha})^{\beta}] - 1\}$$
$$= \ln\{1 - \exp[-(\frac{t}{\alpha})^{\beta}]\} - \ln\{\exp[-(\frac{t}{\alpha})^{\beta}]\} \qquad (25)$$
$$= -\exp[-(\frac{t}{\alpha})^{\beta}] + (\frac{t}{\alpha})^{\beta}$$

چون t در این حالت بزرگ است بنابراین قسمت اول به سمت صفر میل پیدا می کندو منحنی فرضی $(\frac{t}{\alpha})^{\beta}$ می باشدبنابراین با لگاریتم گیری مجدد از این تابع یک خط مستقیم به داده های بزرگ برزاش داده و با روش گرافیکی پارامترها را محاسبه می کنیم. بدین ترتیب با حل معادلات حاصل از قسمت اول و دوم پارامترهای $\alpha$ و $\lambda$ را نیز برآورد می کنیم.

## نتیجه گیری

در این مقاله به بررسی مدل وایبل تعمیم یافته برای داده های بقا با نرخ مخاطره U شکل پرداخته شد. همان طور که اشاره شد کاربرد این مدل در واقعیت بسیار زیاد است . برآورد پارامترهای آن با استفاده از روش درستنمائی و گرافیکی (کاغذ احتمال وایبل ) امکان پذیر می باشد.از طرفی این مدل به دلیل دارا بودن پارامتر مقیاس نسبت به مدل های ارائه شده قبلی توسط دیگر محققین، انعطاف پذیری زیادی برای برازش به داده های مختلف دارد.

## مراجع


[1] Xie M, Tang Y, Goh TN. A modified Weibull extension with bathtub –shaped failure rate function. Reliability Engineering and System Safety 2002; 76:279-285.

[2] Lai CD, Xie M, Murthy DNP. Bathtub-shaped failure rate life distributions. Handbook of statistics. Advances in reliability, vol. 20.London: Elsevier, 2001 p. 69-104

[3]Tang Y, Xie M, Goh TN. Statistical analysis of a weibull extension model. Communication in Statistics 2003; Vol. 32, No. 5, pp. 913-928

[4]Chen Z. A new two-parameter lifetime distribution with bathtub shape or increasing failure rate function. Statistics & Probability Letters.2000; 49: 155-161.

[5]Lawless JF. Statistical Models and Methods for life time data.1982; Wiley, New York

[6]Mi J. Bathtub failure rate and upside-down bathtub mean residual life. IEEE Transaction on Reliability. 1995; Vol. 44, No.3, pp. 388-397