

روش جایگزینی بهینه دو متغیره سیستمهای قابل تعمیر

رضا احمدی^۷

اصفهان - خیابان هزار جریب - دانشگاه اصفهان - دانشکده علوم - گروه آمار

Email: re_ahmadi_stat@yahoo.com

چکیده

امروزه به منظور کاهش هزینه های عملکرد سیستمها که شامل هزینه هایی چون هزینه تعمیر و هزینه جایگزینی کامل سیستم می باشد راهکارهای مختلفی معرفی شده است . از جمله این راهکارها ، روشهای جایگزینی دو متغیره (N, T) و N است ، که در آن T به مدت زمان عملکرد سیستم و N به تعداد از کارافتادگیهای آن اشاره دارد . بر اساس این دو روش ، جایگزینی کامل سیستم (تجدید) بر اساس مدت زمان عملکرد سیستم (T) و تعداد از کارافتادگیهای آن (N) می باشد . بدین ترتیب که در روش جایگزینی دو متغیره (N, T) تجدید زمانی صورت می گیرد که طول عمر سیستم به T واحد زمان یا تعداد از کارافتادگیهای آن به N رسیده باشد ، در صورتیکه در روش جایگزینی N جایگزینی کامل سیستم تنها بر اساس تعداد از کارافتادگیهای سیستم می باشد . در این مقاله ، سیستم مورد مطالعه سیستمی تک واحدی ، قابل تعمیر و با یک تعمیر کننده سیستم تحت روش جایگزینی (N, T) می باشد به طوری که به دنبال از کارافتادگی آن سیستمی نو جایگزین سیستم از کارافتاده نخواهد شد . هدف از این مقاله به دست آوردن هزینه متوسط طول مدت اجرا در واحد زمان^۸ و تعیین روش جایگزینی بهینه $(N, T)^*$ به روشهای تحلیلی یا عددی و در نهایت مینیمم کردن هزینه متوسط طول مدت اجرا در واحد زمان می باشد . در پایا ن به مقایسه دو روش جایگزینی N و (N, T) و اثبات بهینه بودن روش جایگزینی دو منغیره دو متغیره (N, T) نسبت به روش جایگزینی N می پردازیم .

واژه های کلیدی: فرآیند هندسی^۹ - فرآیند تجدید^{۱۰} - دوره تجدید - نظریه تجدید پاداش^{۱۱} - پیچش^{۱۲} .

^۷ - دانشجوی کارشناسی ارشد

^۸ - Long-run average cost per unit time

^۹ - Geometric process

^{۱۰} - Renewal process

^{۱۱} - Reward renewal theorem

^{۱۲} - Convolution

۱- مقدمه

یکی از روشهای رایج در زمینه تعمیر و نگهداری سیستمها که توجه بسیاری از محققان را به خود جلب کرده است روش جایگزینی سیستمهای قابل تعمیر می باشد. (Barlow, Proschan (1965) با در نظر گرفتن معیارهایی مناسب چون مدت زمان عملکرد سیستم (T) و همچنین از کارافتادگی سیستم، به مطالعه در زمینه روشهای جایگزینی سیستمها پرداختند. به عبارت دیگر جایگزینی کامل سیستم زمانی صورت می گیرد که مدت زمان عملکرد سیستم به T رسیده باشد یا سیستم از کار افتاده باشد. هدف از این مدل تعیین مقدار بهینه T^* است به طوری که هزینه متوسط طول مدت اجرا در واحد زمان مینیمم شود. (Park(1979) یک روش جایگزینی، با این فرض که معیار جایگزینی کامل سیستم مستلزم تعداد از کارافتادگیها سیستم (N) است را مورد مطالعه قرار داده است. هدف (Park(1979) از این مدل، به دست آوردن مقدار بهینه N^* در جهت مینیمم کردن هزینه متوسط طول مدت اجرا می باشد. هرچند یک فرض مشترک در زمینه روش جایگزینی سیستمها، جایگزینی سیستمی نو در لحظه تعمیر می باشد، ولیکن به دلیل فرسودگی سیستم منطقی است مدلی در نظر گرفته شود که با گذشت زمان طول عمر سیستم کاهش و مدت زمانهای تعمیر افزایش یابد بدین منظور Lam(1988a,b) با ارائه دو روش جایگزینی N و T ، منطبق با مدت زمانهای عملکرد و تعمیر سیستم ذکر شده، به معرفی فرآیند هندسی پرداخته است. در این نوشته که تعمیمی از مدل Lam(1988a,b) است مدلی تحت روش جایگزینی دو متغیره (N, T) بر اساس تعداد از کارافتادگیها و مدت زمان عملکرد سیستم ارائه شده است. هدف از مدل معرفی شده، تعیین مقادیر بهینه $(N, T)^*$ است به طوری که هزینه متوسط طول مدت اجرا در واحد زمان مینیمم شود. از جمله مزیتهای این مدل که می توان بدان اشاره داشت کمتر بودن هزینه متوسط طول مدت اجرا در واحد زمان نسبت به دو روش جایگزینی N و T می باشد.

۱-۱- تعریف

فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی به ترتیب با تابع توزیع های $F_X(x) = p(X \leq x)$ و $F_Y(y) = p(Y \leq y)$ باشد. گوییم متغیر تصادفی X به طور تصادفی^{۱۳} بزرگتر از متغیر تصادفی Y است و می نویسیم $X \geq Y$ ، اگر به ازای هر a

$$1 - F_X(a) \geq 1 - F_Y(a)$$

باشد.

۲-۱- تعریف

فرض کنید $\{\xi(t); t \geq 0\}$ فرآیندی شمارشی و $\{X_n; n = 1, 2, \dots\}$ دنباله ای از متغیرهای تصادفی مستقل و نامنفی

¹³ - Stochastically

با تابع توزیع $F(a^{n-1}t)$ $n=1,2,\dots$ باشد که در آن a مقداری ثابت و مثبت است. در اینصورت فرآیند شمارشی $\{\xi(t); t \geq 0\}$ یک فرآیند هندسی است اگر $\{T_n \leq t; n=1,2,\dots\} = \{\xi(t); t \geq 0\}$ باشد، که در آن $T_n = \sum_{i=1}^n X_i$ ، T_n زمان n امین تغییر و X_n ، n امین زمان ورودی تغییر نامیده می شود. واضح است که به ازای مقادیر $a > 1$ ، $\{X_n; n=1,2,\dots\}$ به طور تصادفی نزولی است یعنی

$$X_n > X_{n+1} \quad n=1,2,\dots$$

و چنانچه $0 < a < 1$ باشد، در اینصورت $\{X_n; n=1,2,\dots\}$ به طور تصادفی صعودی است یعنی

$$X_n < X_{n+1}$$

و اگر $a=1$ اختیار شود، $\{X_n; n=1,2,\dots\}$ دنباله ای از متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع مشترک $F(t)$ می باشد و لذا فرآیند هندسی $\{\xi(t); t \geq 0\}$ به یک فرآیند تجدید تبدیل خواهد شد.

۲- ساختار مدل

فرضهای ذیل در مورد مدل جایگزینی را در نظر بگیرید:

۱. سیستم به محض از کار افتادگی تعمیر خواهد شد.
۲. متغیر تصادفی X_n مدت زمان بقاء سیستم پس از $(n-1)$ امین تعمیر با تابع توزیع $F(a^{n-1}t)$ است به طوری که $E(X_1) = \lambda > 0, a \geq 1$ است.
۳. متغیر تصادفی Y_n مدت زمان تعمیر سیستم به دنبال n امین از کارافتادگی با تابع توزیع $G(b^{n-1}t)$ است به طوری که $E(Y_1) = \mu > 0, 0 < b \leq 1$ است.
۴. متغیرهای تصادفی X_n, Y_n مستقلند.
۵. مدت زمان جایگزینی سیستم اندک می باشد.
۶. ممکن است سیستم از کار افتاده با سیستم نو جایگزین خواهد شد.
۷. C_1 هزینه تعمیر سیستم در واحد زمان، C_2 هزینه پاداش عملکرد سیستم در واحد زمان و C_3 هزینه کامل جایگزینی کامل سیستم می باشد.
۸. روش جایگزینی، روش جایگزینی دو متغیره (N, T) است.

۳- متوسط طول مدت اجرا در واحد زمان تحت روش جایگزینی (N, T)

هدف، انتخاب روش جایگزینی دو متغیره بهینه $(N, T)^*$ است به طوری که هزینه متوسط طول مدت اجرا در واحد زمان مینیمم شود.

فرض کنید T_1 مدت زمان اولین جایگزینی و $T_n; n \geq 2$ مدت زمان بین $(n-1)$ امین و n امین جایگزینی باشد .
قرار می دهیم

$$U_n = \sum_{i=1}^n X_i \quad , \quad V_n = \sum_{i=1}^n Y_i \quad (1)$$

فرض کنید $C(T, N)$ هزینه متوسط طول مدت اجرا در واحد زمان تحت روش جایگزینی (N, T) باشد . با توجه به اینکه $\{T_1, T_2, \dots\}$ تشکیل فرآیند تجدید می دهد ، لذا مدت زمان ورودی بین دو جایگزینی متوالی یک چرخه تجدید بوده و بنابر نظریه تجدید پاداش داریم :

$$C(N, T) = (\text{متوسط طول یک چرخه تجدید}) / (\text{متوسط هزینه یک چرخه تجدید}) \quad (2)$$

با این فرض که W طول یک چرخه تجدید تحت روش جایگزینی (N, T) باشد ، خواهیم داشت :

$$W = \left(T + \sum_{i=1}^k Y_i \right) \chi_{\{U_N > T\}} + \left(\sum_{i=1}^N X_i + \sum_{i=1}^{N-1} Y_i \right) \chi_{\{U_N \leq T\}} \quad (N \geq 1) \quad (3)$$

که در آن $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$ و χ یک تابع نمایشگر به صورت

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

است .

با استفاده از خاصیت امید ریاضی شرطی ، میانگین مدت زمان طول دوره تجدید برابر است با :

$$\begin{aligned} E(W) &= E \left[\left(T + \sum_{i=1}^k Y_i \right) \chi_{\{U_N > T\}} \right] + E \left[\left(\sum_{i=1}^N X_i + \sum_{i=1}^{N-1} Y_i \right) \chi_{\{U_N \leq T\}} \right] \\ &= E[T \chi_{\{U_N > T\}}] + E \left[\left(\sum_{i=1}^k Y_i \right) \chi_{\{U_N > T\}} \right] + E \left\{ \left[\left(\sum_{i=1}^N X_i + \sum_{i=1}^{N-1} Y_i \right) \chi_{\{U_N \leq T\}} \mid U_N = u \right] \right\} \\ &= T \bar{F}_N(T) + E \left[\sum_{i=1}^{N-1} Y_i \chi_{\{U_i < T < U_N\}} \right] + \int_0^T E \left[\left(\sum_{i=1}^N X_i + \sum_{i=1}^{N-1} Y_i \right) \mid U_N = u \right] dF_N(u) \\ &= T \bar{F}_N(T) + \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\mu}{b^{i-1}} E[\chi_{\{U_i < T < U_N\}}] + \int_0^T u dF_N(u) + \int_0^T \left(\sum_{i=1}^{N-1} E(Y_i) \right) dF_N(u) \\ &= T \bar{F}_N(T) + \int_0^T u dF_N(u) + \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\mu}{b^{i-1}} F_N(T) + \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\mu}{b^{i-1}} E(\chi_{\{U_i < T < U_N\}}) \end{aligned} \quad (4)$$

با توجه به اینکه

$$\int_0^T u dF_N(u) = TF_N(T) - \int_0^T F_N(u) du$$

است ، داریم :

$$E(W) = \int_0^T \bar{F}_N(u) du + \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\mu}{b^{i-1}} F_N(T) + \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\mu}{b^{i-1}} E(\chi_{\{U_i < T < U_N\}})$$

که در آن $\bar{F}_N(u) = 1 - F_N(u)$ است .

قرار می دهیم $W_{N-i} = \sum_{j=i+1}^N X_j$ بنابراین می توان نوشت :

$$U_N = U_i + W_{N-i}$$

علاوه بر این فرض کنید $G(x) = F(a^i x)$ تابع توزیع متغیر تصادفی X_{i+1} و $G_{N-i}(w)$ تابع توزیع متناظر با متغیر

تصادفی W_{N-i} باشد ، در اینصورت به کمک استقرا می توان نشان داد

$$G_{N-i}(w) = F_{N-i}(a^i w)$$

است .

لذا

$$\begin{aligned} E[\chi_{\{U_i < T < U_N\}}] &= p\{U_i < T < W_{N-i}\} \\ &= \int_0^T \int_{T-u}^{\infty} dG_{N-i}(w) dF_i(u) = \int_0^T \bar{F}_{N-i}(a^i(T-u)) dF_i(u) \end{aligned}$$

9

$$E(W) = \int_0^T \bar{F}_N(u) du + \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\mu}{b^{i-1}} F_N(T) + \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\mu}{b^{i-1}} \int_0^T \bar{F}_{N-i}(a^i(T-u)) dF_i(u)$$

با توجه به فرضهای ۲ و ۴ داریم :

$$C(N, T) = \frac{C_1 \left[\sum_{i=1}^{N-1} \frac{\mu}{b^{i-1}} F_N(T) + \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\mu}{b^{i-1}} \int_0^T \bar{F}_{N-i}(a^i(T-u)) dF_i(u) \right] + C_3 - C_2 \int_0^T \bar{F}_N(u) du}{\int_0^T \bar{F}_N(u) du + \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\mu}{b^{i-1}} F_N(T) + \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\mu}{b^{i-1}} \int_0^T \bar{F}_{N-i}(a^i(T-u)) dF_i(u)}$$

(۵)

با توجه به اینکه طول عمر سیستم قابل تعمیر محدود می باشد ، لذا مینیمم هزینه متوسط طول مدت اجرا در واحد

زمان متناهی است لذا به منظور تعیین مقادیر بهینه $(N, T)^*$ کافی است مقدار بهینه T_m^* را به دنبال مینیمم کردن هزینه

متوسط طول مدت اجرا ، به ازای مقادیر ثابت $N = m$ ، که m عددی طبیعی است ، به دست آورده و سپس به مینیمم

کردن تابع هزینه $C_m(T_m^*) = \min C_m(T)$ به ازای تمام مقادیر m بپردازیم .

به عنوان مثال فرض کنید $C_n(T_n^*)$ مینیمم مقدار $C_i(T_i^*)$ به ازای مقادیر $i = 1, 2, \dots, m, \dots$ باشد، در اینصورت مقدار بهینه $(N, T)^*$ را طوری می یابیم که

$$C((N, T)^*) = \min_N C_n(T_n^*)$$

باشد.

۴- توضیحات

در این بخش نشان خواهیم داد که روش جایگزینی دو متغیره بهینه $(N, T)^*$ از نظر مینیمم هزینه بهتر از دو روش جایگزینی بهینه N^* و T^* است.

در حالت خاص فرض کنید C_1, C_2, C_3 به ترتیب مقادیر متناظر با C_1, C_2, C_3 باشند، در اینصورت

$$C_2(N) = \frac{C\mu \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{b^{i-1}} + C_3 - \lambda \sum_{i=1}^N \frac{1}{a^{i-1}}}{\lambda \sum_{i=1}^N \frac{1}{a^{i-1}} + \mu \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{b^{i-1}}} \quad (۶)$$

تابع هزینه مدل Lam(1988) می باشد.

به منظور بررسی بهینه بودن روش جایگزینی دو متغیره (N, T) نسبت به روش جایگزینی N می توان نوشت

$$C((T, N)^*) = \min_N C_n(T_n^*) = \min_N [\min_T C(T, N)] \leq \min_N C(\infty, N) = C_2(N^*) \quad (۷)$$

لذا با توجه به رابطه (۷) روش جایگزینی $(N, T)^*$ بهتر از روش جایگزینی N^* است. علاوه بر این تحت برخی از شرایط Stadje, Zuckerman(1990) نشان دادند، روش بهینه N^* بهتر از روش بهینه T^* است. بنابراین تحت شرایطی مشابه روش بهینه $(N, T)^*$ بهتر از روشهای بهینه N^* و T^* می باشد.

۵- نتیجه

از جمله نتایجی که در مطالعه مدل تعمیر و نگهداری سیستمها تحت روش جایگزینی دو متغیره (N, T) می توان بدان اشاره داشت، تعمیم روش جایگزینی سیستم با در نظر گرفتن مدت زمان عملکرد سیستم و تعداد از کارافتادگیهای آن، ارائه مدلی منطبق با سیستمهای قابل تعمیر، از نظر طول عمر عملکرد سیستم بعد از تعمیر و مدت زمان تعمیر و همچنین بهینه بودن این روش نسبت به روش جایگزینی N از نظر مینیمم هزینه متوسط در یک دوره تجدید می باشد.

مراجع

- [1] Barlow, R. E. and Proschan, F. "Mathematical Theory of Reliability "Wiley, New York . (1965).
- [2] Park, K. S. "Optimal number of minimal repairs before replacement " IEEE Trans . Reliability **28**, 137-140. (1979).
- [3] Lam Yeh . " A note on the Optimal Replacement Problem " Adv. Appl . Prob. 20,479-482 . (1988a).
- [4] Lam Yeh . " Geometric Process and Replacement Problem " Acta. Math. Appl. Sinica **4**, 366-377.(1988b).
- [5] Stadjie, W. and Zuckerman, D. " Optimal Strategies for some Repair Replacement Models " Adv. Appl. Prob. **22**, 641-656. (1990).
- [6] Lam Yeh . " A repair replacement model " Adv. Appl. Prob. **22**, 494-497. (1990).

